**УРОК-ЛЕКЦИЯ**

Тема занятия: **Некоторые геометрические увлечения Наполеона**

Диамбекова Алла Лазаровна

педагог МКОУ ДОД ДДТ Дигорского района РСО-Алания.

## Цель занятия – изучение некоторых геометрических увлечений Наполеона.

## Задачи – а) рассмотреть три доказательства теоремы Наполеона;

##  б) ознакомиться с любимыми геометрическими головоломками императора;

ХОД ЗАНЯТИЯ

 Математика как основа всех наук во все времена привлекала пытливые неординарные умы. Юрист Пьер Ферма (1601-1665) известен как самый загадочный математик среди слуг «царицы наук». Священник Иван Первушин (1827-1900) справился с вычислением простого числа Мерсенна с показателем 61 и нашёл делители для чисел Ферма с индексом 12 и 23, что являлось в теории чисел того времени очень большим достижением. Император Франции Наполеон Бонапарт (1769-1821) не упускал возможности позаниматься геометрией. Этот список можно продолжить, но я хочу остановиться на Наполеоне I.

 Из истории всем известно, что император Франции был блестящим полководцем и великим государственным деятелем. Книг о Наполеоне — более двухсот тысяч! Историки знают, во что одевался Наполеон, что было у него на ногах, сколько стоили его носовые платки, что он любил есть и во сколько завтракал, каким был распорядок его дня. Академик Фредерик Массон на рубеже XX века выпустил 13-томное исследование «Наполеон и его семья», посвященное практически всем сторонам жизни Наполеона. Но в них мало написано о математических способностях великого императора.[2]

 Бонапарт-математик – это скрытая от многих страница истории. В декабре 1778 года Наполеон был принят в колледж в Отёне, главным образом с целью обучения французскому языку. Особых успехов Наполеон добился в математике. Благодаря победе в конкурсе «Ожерелье королевы», он был принят в Королевскую кадетскую школу в Париже. Обладая аналитическим умом, он добился определенных успехов в области математики. Своими знаниями он поражал многих великих математиков того времени. За заслуги в математике он был избран академиком Французской академии наук и стал магистром математики. [6]

 У императора было увлечение – составление геометрических задач. Некоторые его задачи отличаются простотой постановки и допускают изящные решения.[1]

 Он находил время заниматься геометрией для собственного удовольствия, чувствовал в ней красоту и объект, достойный приложения остроумия и изобретательности. Одно из свидетельств тому – несколько составленных им задач на построение, вычисление неизвестной величины, доказательство утверждений евклидовой геометрии, а также геометрические игры-головоломки.

Теорема Наполеона.

**На сторонах произвольного треугольника АВС внешним образом построены как на основаниях равносторонние треугольники (рис. 1). Доказать, что центры этих треугольников также являются вершинами равностороннего треугольника.**

##

## hbc1.png

## рис.1

## Доказательство 1:

## Задача имеет довольно изящное решение.

##  Пусть M, N, K – центры равносторонних треугольников. Выполним дополнительное построение: соединим точки M, N, K с ближайшими (к каждой из них) двумя вершинами треугольника АВС и между собой.

## Т.к. M, N, K – центры равносторонних треугольников, то АМ = МВ, BN = NC, CK = KA;

## < AMB = < BNC = < CKA = 120o, а их сумма равна 360о.

## Выделим шестиугольник AMBNCK, а внешние к нему невыпуклые четырехугольники отбросим. Получим фигуру, изображенную на рис. 2.

##  рис 2. рис.3

## Отрезая теперь от упомянутого шестиугольника треугольники МАК и NCK, перемещая их в плоскости в положение, которое указано на рис. 3, получаем четырехугольник MDNK.

## Отрезок MN делит его на два равных (по трем сторонам) треугольника. Углы DNK и DMK равны 120$°$ каждый. Поэтому углы NMK и MNK равны 60$°$ каждый.

## Следовательно, треугольник MNK – равносторонний, что и требовалось доказать. [3]

## Доказательство 2:

## Лемма. Окружности, описанные около треугольников *ABX*, *BCY* и *CAZ*, пересекаются в одной точке. (рис. 4)

##  *Доказательство леммы.* Пусть *P* - точка пересечения окружностей, описанных около треугольников *BCY* и *CAZ*.

## а). Предположим, что точка *P* лежит внутри треугольника *ABC*. Тогда из свойства вписанного четырехугольника вытекает, что углы *BPC* и *CPA (*рис*.* 5*)* равны 120$°$. Следовательно, угол *APB=*120$°$ и точка *P* лежит также на окружности, описанной около  $∆$*ABX.*

##  . Рис. 4

## Доказательство теоремы*.*

##  Обозначим через *M*, *N* и K (рис.5) центры равносторонних треугольников *ABX*, *BCY* и *CAZ* соответственно. Прямая, соединяющая центры пересекающихся окружностей, перпендикулярна их общей хорде. Отсюда следует, что *MN*  перпендикулярнa *BP*, *NK* перпендикулярнa *CP* и *MK* перпендикулярнa *AP*. В доказательстве леммы мы установили, что углы *APB*, *BPC* и *CPA* равны 120$°$. Так как сумма углов любого четырёхугольника равна 360$°$, то каждый из углов *MNK*, *NKM* и *KMN* равен 60$°$, т.е. треугольник MNK- равносторонний, что и требовалось доказать. [2]

##  ccc.jpgрис. 5

## б). Пусть теперь Р лежит на самом треугольнике.(рис. 6) Очевидно, тогда Р совпадает с вершиной С и в данном треугольнике угол ВСА=120$°$, и это обеспечивает принадлежность точки Р окружности, описанной около $∆$АВХ. Т.е. лемма верна.

## Для доказательства теоремы в этом случае достаточно увидеть, что угол КМС из $∆$МСО равен 60$°.$ Аналогично, угол СNВ равен 60$°.$ В итоге получаем равносторонний $∆$MNK. Теорема доказана.

## рис 6.jpg

## в). Если в данном треугольнике один из углов больше 120$°$, то точка Р «выскочит» за треугольник. (рис. 7) В этом случае рассмотрим угол АРВ как сумму углов АРС и ВРС. Угол АРС – вписанный и опирается на дугу АС, на которую опирается также вписанный угол АZС в 60$°$. Поэтому угол АРС равен 60$°$. Аналогично и угол ВРС. Значит, угол АРВ равен 120$°$, и снова лемма доказана.

## Докажем теорему для этого случая. В прямоугольном $ ∆PDО\_{3}$ угол $PDО\_{3}$ равен 30$°$ и он вертикален с углом MD$O\_{1}$ прямоугольного треугольника MD$O\_{1}.$ Следовательно, угол KMN равен 60$°$. Аналогично и угол MNK. В итоге получаем равносторонний $∆$MNK. Теорема доказана.

## рис 7.jpg

## Доказательство 3. Определим расстояние между центрами K и N из четырёхугольника NK$B\_{1}A\_{1}$, где  и - середины сторон BC и AC треугольника AВC. В этом четырёхугольнике (рис. 8)

##  aaa.jpgРис. 8

## N$A\_{1}=\frac{a√3}{6}$, $KB\_{1}=\frac{b√3}{6}, A\_{1}B\_{1}=\frac{c}{2}$. Величины интересующих нас углов приведены на рисунке 9.

## рис9.png

## Рис. 9

## Рассмотрим векторное равенство $\vec{KN}= \vec{KB\_{1}}$+$\vec{B\_{1}A\_{1}}+\vec{A\_{1}N.}$

## Преобразуем его, возведя обе части в квадрат и применив свойства векторов:

## KN2 = K$B\_{1}$2 + $B\_{1}A\_{1}$2 + $A\_{1}N$ 2 + 2 K$B\_{1}∙B\_{1}A\_{1}∙$ $\cos((90°-A))$ + 2 K$B\_{1}∙A\_{1}N∙\cos(C)$ + 2 $B\_{1}A\_{1}∙ A\_{1}N∙\cos((90°-B))$ = $(\frac{b\sqrt{3}}{6})^{2}+ (\frac{c}{2})^{2}+ (\frac{a\sqrt{3}}{6})^{2}+2∙\frac{b\sqrt{3}}{6} ∙ \frac{c}{2} ∙ \sin(A)+ 2∙\frac{b\sqrt{3}}{6} ∙ \frac{a\sqrt{3}}{6} ∙\cos(C)+ 2∙\frac{a\sqrt{3}}{6} ∙ \frac{c}{2} ∙ \sin(B)$.

## Поэтому .

## Но .

## Следовательно, .

## Симметрия полученной формулы относительно a, b и c указывает на то, что KN=NM=MK,т.е. треугольник правильный. Что и требовалось доказать.

## Если исходный ∆АВС - равносторонний треугольник, то все внутренние центроиды стягиваются в точку, а треугольник, вершины которого являются внешними центроидами, вместе с исходным ∆АВС образуют фигуру, известную как «Звезда Давида».

## Звезда Давида —  эмблема в форме шестиконечной звезды ([гексаграммы](http://nsportal.ru/ap/drugoe/library/zadacha-napoleona)), в которой два равносторонних треугольника наложены друг на друга: верхний — концом вверх, нижний — концом вниз, образуя структуру из шести равносторонних треугольников, присоединенных к сторонам шестиугольника.

## Звезда Давида изображена на [флаге Государства Израиль](http://xn--80anccp1a2i/) и является одним из основных его символов. Согласно легенде, этот символ был изображён на щитах воинов царя [Давида](http://xn--80aeect/). [5]

## Очевидцы рассказывают, что Наполеон любил задавать своим офицерам такую головоломку: какие плоские геометрические фигуры можно построить из девяти (рис.10) предложенных в россыпь деталей? Простую с виду задачу решить удавалось не каждому. Маршал Даву, говорят, сумел собрать из предложенных деталей квадрат, а Мюрат - и квадрат, и прямоугольник, а позже нашелся полковник, построивший звезду (рис.11). Но никто до сих пор не сумел построить из этих деталей треугольник, ромб или трапецию... Да и есть ли решение вообще? [6]

## Я смог дать на этот вопрос положительный ответ, построив новые фигуры, приведённые на рисунке 14 в приложениях.

## Детали головоломки

##  рис.10

##  123.jpgРис.11

## Обращаем внимание на одну особенность углов в деталях треугольной и четырехугольной формы: 18$°$, 36$°$, 54$°$, 72$°$, 90$°$, 108$°$, 126$°$, 144о - они кратны цифре 18? Почему? Может, именно в этой кратности скрыта подсказка?

Библиографический список

## Березин В.Н. Задача Наполеона // Квант. - 1972. -№6,с.29.

## Михайлов И.И. Задача Наполеона. – gavrilova. 21415s02.edusite/ru.

## Савин А.П. Задача Наполеона//Энциклопедический словарь юного математика.- М:, Педагогика, 1985.-298с.

## Тюганова Т. Задача Наполеона. – nsportal.ru.

## Школьный проект «Геометрия глазами Наполеона Бонапарта». – junst-klin.ucoz.ru.